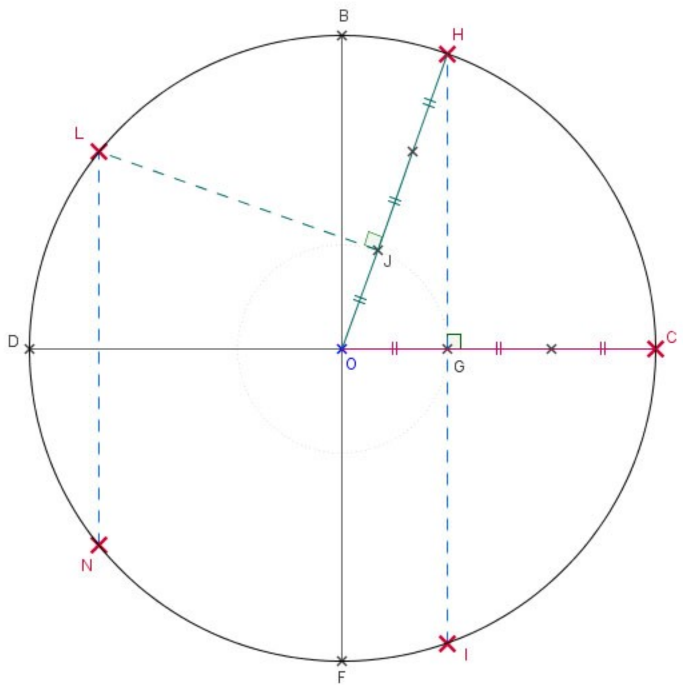
Devoir à la maison *à faire en mangeant une pizza*

Romain, grand amateur de pizza, a invité Donatello, Leonardo, Raphaël et Michelangelo à déguster une pizza au piment chez PizzaFive. Le serveur apporte la pizza, et en quelques coups de couteau coupe la pizza en cinq parts qui semblent « égales »[1] ! Romain, étonné, lui demande comment il a fait. Le serveur, qui semble ravi qu'on lui pose cette question, sort alors une carte de sa poche. Romain s'empresse de la lire :



- Je trace le centre O de la pizza, et deux diamètres perpendiculaires [BF] et [DC].
- J'évalue le point G au tiers de [OC] en partant de O, je trace la perpendiculaire à (OC) passant par G : elle coupe les bords de la pizza (le cercle) en deux points H et I.
- J'évalue le point J au tiers de [OH] en partant de O, et je trace la perpendiculaire à (OH) passant par J : elle coupe le cercle en un point L.
- Enfin, je trace la parallèle à (BF) passant par L : elle coupe le cercle en un point N.

En traçant sur la pizza [OH], [OL], [ON], [OI] et [OC], j'obtiens cinq parts égales !

Cette méthode, très simple, permet-elle effectivement de partager la pizza en cinq parts « égales »[2] ?

Afin de simplifier les calculs, on considère que notre pizza a un rayon OC=1 cm.

I- Conjecture [facultatif]

Faire une figure sur le logiciel de géométrie dynamique Geogebra, et conclure (à l'aide d'une conjecture). Envoie ton fichier Geogebra au professeur par email.

II- Démonstration

Dans la suite, lorsqu'on parle de mesure d'angle, l'unité de mesure est le degré.

1. Calculer $\cos(\widehat{HOC})$. En déduire une valeur approchée de la mesure de l'angle $\widehat{HOC}$?

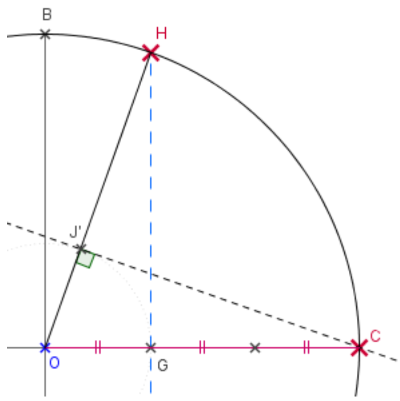
2. Calculer $\cos(\widehat{COI})$. En déduire une valeur approchée de la mesure de l'angle $\widehat{COI}$?

1 On considère que la pizza est un disque (on aurait pu également la modéliser par un cylindre de révolution); par « égales » on entend « de même aire ».

2 *Ne faites confiance à personne. La vérité est ailleurs. X-Files...*

3. Soit (d) la droite perpendiculaire à (OH) qui passe par C, et J' le point d'intersection de (d) et (OH).

Montrer que $OJ'=\frac{OC}{3}$.



4. En déduire que J=J', puis que le triangle OJC est rectangle en J.

5. Montrer que les points L, J et C sont alignés.

6. Montrer que $\widehat{HOL} = \widehat{HOC}$. *<u>Indication</u> : le triangle LOC est isocèle en O.*

7. Montrer que $\widehat{LOD}=180°-2\times\widehat{HOC}$.

8. Montrer que $\widehat{NOD} = \widehat{LOD}$. En déduire que $\widehat{LON}=360°-4\times\widehat{HOC}$, puis donner une valeur approchée de la mesure de l'angle $\widehat{LON}$.

8bis. Peut-on (déjà !) répondre au problème posé ?

9. Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{NOI}$? *<u>Indication</u> : symétrie axiale d'axe (DC)...*

10. Calculer les aires des 5 parts ainsi formées, c'est-à-dire les aires des secteurs angulaires formés par les demi-droites :

- [OC) et [OH) : secteur n°1
- [OH) et [OL) : secteur n°2
- [OL) et [ON) : secteur n°3
- [ON) et [OI) : secteur n°4
- [OI) et [OC) : secteur n°5

11. Y a-t-il une part plus « grosse » qu'un autre ?

- Si oui, quelle est la proportion d'aire “en plus” dans la grosse part par rapport à la plus petite ? (on appelle cela le ***taux de variation*** maximal des aires des parts coupées)
- Si non, proposer une idée de cadeau à faire au serveur pour le remercier de vous avoir appris une si belle méthode !

Pour le professeur

Notions utilisées (choisies !) :

<table>
<tr><th>Question</th><th>Notion(s) utilisée(s)</th><th>Vue en classe de...</th></tr>
<tr><td>1 & 2 & 3</td><td>- utiliser dans un triangle rectangle la relation entre le cosinus d'un angle aigu et les longueurs des côtés adjacents
- utiliser la calculatrice pour déterminer une valeur approchée de l'angle aigu dont le cosinus est donné</td><td>4ème
4ème</td></tr>
<tr><td>4</td><td colspan="2">raisonnement possible dès la 6ème</td></tr>
<tr><td>5</td><td>“si (AB)=(BD) alors A, B et D sont alignés”</td><td>Dès la 6ème (?)</td></tr>
<tr><td>6</td><td>- <u>1ère méthode</u> : “la hauteur issue de B dans un triangle ABC isocèle en B est aussi la bissectrice (intérieure) de l'angle $\widehat{ABC}$ ”
- <u>2ème méthode</u> : “la symétrie axiale conserve les angles”</td><td>6ème
6ème</td></tr>
<tr><td>7</td><td>- “si A, B et C sont alignés dans cet ordre alors $\widehat{ABC}$ =180°”
- “si A, B et C sont alignés, et D n'appartient pas à (AB), alors $\widehat{ABC}=\widehat{ABD}+\widehat{CBD}$ ”</td><td>6ème</td></tr>
<tr><td>8</td><td>- “la hauteur issue de B dans un triangle ABC isocèle en B est aussi la bissectrice (intérieure) de l'angle $\widehat{ABC}$ ”
- “si A, B et C sont alignés, et D n'appartient pas à (AB), alors $\widehat{ABC}=\widehat{ABD}+\widehat{CBD}$ ”
- distributivité de la multiplication par rapport à l'addition</td><td>6ème
6ème
5ème</td></tr>
<tr><td>8bis</td><td>- “étant donné un disque, l'aire d'un secteur angulaire est proportionnelle à la mesure de l'angle qui l'intercepte”
- raisonnement par l'absurde ou par contraposée
- “des angles ayant le même cosinus sont de même mesure”</td><td>5ème
collège
4ème (?)</td></tr>
<tr><td>9</td><td>“la symétrie axiale conserve les angles”</td><td>6ème</td></tr>
<tr><td>10</td><td>- “étant donné un disque, l'aire d'un secteur angulaire est proportionnelle à la mesure de l'angle qui l'intercepte”
- “l'aire d'un disque de rayon r est égale à π x r x r”</td><td>5ème
6ème</td></tr>
<tr><td>11</td><td>proportion (calcul d'un pourcentage)</td><td>5ème</td></tr>
</table>

Elements de correction

1. Dans le triangle *HGO* rectangle en *G* : $\cos(\widehat{HOG})=\frac{OG}{OH}=\frac{\frac{1}{3}OC}{OC}=\frac{1}{3}$. Or, $\widehat{HOG}$ = $\widehat{HOC}$ donc :

$\cos(\widehat{HOC})=\frac{1}{3}$ et $\widehat{HOC}\approx 70{,}53°$.

2. Par le même raisonnement dans le triangle *OGI* rectangle en *G*, on obtient :
$\cos(\widehat{COI})=\frac{1}{3}$ et $\widehat{COI}\approx 70{,}53°$.

3. Dans le triangle *OJ'C* rectangle en *J'* : $\cos(\widehat{J'OC})=\frac{OJ'}{OC}$ donc $OJ'=OC\times\cos(\widehat{HOC})$.
Or, $\cos(\widehat{HOC})=\frac{1}{3}$ donc $OJ'=OC\times\frac{1}{3}=\frac{OC}{3}$.

4. $J\in[OH]$ et $J'\in[OH]$ avec $OJ=OJ'$ donc $J=J'$.
On a finalement : *OJ'C* est un triangle rectangle en *J'* et $J=J'$
donc : le triangle *OJC* est rectangle en *J*.

5. $\widehat{LJO}=\widehat{CJO}$ donc *L* et *C* appartiennent à la droite perpendiculaire à *(OJ)* passant par *J* : les trois points *L*, *C* et *J* sont donc alignés.

6. <u>1ère méthode</u> : $J\in(LC)$ et $\widehat{LJO}=90°$ donc *(OJ)* est la hauteur issue de *O* du triangle *LOC*.
Or, *LOC* est isocèle en *O* donc *(OJ)* est aussi la bissectrice de l'angle $\widehat{LOC}$, d'où : $\widehat{LOJ}=\widehat{COJ}$.
Puisque $J\in[OH]$: $\widehat{LOH}=\widehat{HOC}$.
<u>2ème méthode</u> : le symétrique de *O* (resp. *J*) par rapport à *(OJ)* est *O* (resp. *J*). Le symétrique de *C* par rapport à *(OJ)* est un point appartenant à la demi-droite *[JL)*.
Le symétrique de l'angle $\widehat{COJ}$ par rapport à *(OJ)* est donc l'angle $\widehat{LOJ}$.
Or, la symétrie axiale conserve les angles, donc : $\widehat{COJ}=\widehat{LOJ}$.
Autrement dit, puisque $J\in[OH]$: $\widehat{LOH}=\widehat{HOC}$.

7. $\widehat{LOD}=180°-(\widehat{LOH}+\widehat{HOC})=180°-2\widehat{HOC}$

8. LON est isocèle en *O* et *(OD)* est la hauteur issue de *O* dans $\widehat{LON}$, donc *(OD)* est aussi la bissectrice de $\widehat{LON}$, d'où : $\widehat{NOD}$ = $\widehat{LOD}$
donc $\widehat{LON}=\widehat{LOD}+\widehat{NOD}=2\widehat{LOD}=2(180°-2\widehat{HOC})=360°-4\widehat{HOC}$
Or, $\widehat{HOC}\approx 70{,}53°$ donc $\widehat{LON}\approx 77{,}88°$.

8bis. Etant donné un dique, l'aire d'un secteur angulaire est proportionnelle à la mesure de l'angle qui l'intercepte, donc si les parts formées étaient de même aire, alors on aurait $\widehat{LON}=\widehat{HOC}$. Mais on a vu

que $\widehat{HOC} \approx 70{,}53\,°$ et $\widehat{LON} \approx 77{,}88\,°$ … on aboutirait donc a une absurdité !
Conclusion : les parts ne sont pas égales ! Le serveur nous a roulé...
9. Par symétrie axiale d'ace *(DC)* : le symétrique de *I* est *H* ; le symétrique de *N* est *L* ; le symétrique de *O* est *O*. Le symétrique de l'angle $\widehat{NOI}$ est donc l'angle $\widehat{LOH}$. Or, la symétrie axiale conserve les angles donc : $\widehat{NOI} = \widehat{LOH} \approx 70{,}53\,°$.

10. L'aire (en cm²) du disque de rayon *OC* est égale à $\pi \times OC^2 = \pi \times 1^2 = \pi$.
Or, étant donné un dique, l'aire d'un secteur angulaire est proportionnelle à la mesure de l'angle qui l'intercepte. Donc :

- l'aire (en cm²) du secteur n°1 est égale à : $\dfrac{\widehat{HOC}}{360} \times \pi \approx 0{,}62$
- de même, l'aire (en cm²) des secteurs n°2, 4 et 5 est égale à : $\dfrac{\widehat{HOC}}{360} \times \pi \approx 0{,}62$
- l'aire (en cm²) du secteur n°3 est égale à : $\dfrac{\widehat{LON}}{360} \times \pi \approx \dfrac{77{,}88}{360} \times \pi \approx 0{,}68$.

11. La “part secteur n°3” est plus “grosse” que les autres.
Calculons $R = \dfrac{Aire\, du\, secteur\, 3}{Aire\, du\, secteur\, 1}$:

$$R = \frac{\dfrac{\widehat{LON}}{360} \times \pi}{\dfrac{\widehat{HOC}}{360} \times \pi} = \frac{\widehat{LON}}{\widehat{HOC}} = \frac{360 - 4\,\widehat{HOC}}{\widehat{HOC}} = \frac{360}{\widehat{HOC}} - 4$$

Or, $\widehat{HOC} \approx 70{,}53\,°$ d'où : $R \approx \dfrac{360}{70{,}53} - 4 \approx 1{,}1042$
donc l'aire du secteur n°3 est environ 1,1042 fois “plus grande” que l'aire du secteur n°1.
Autrement dit, la “part secteur n°3” contient environ 10,42% de plus que la “part secteur n°1”...