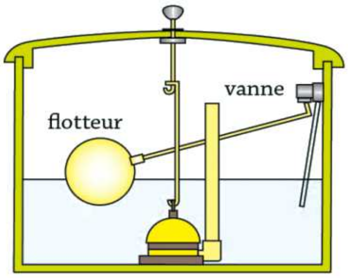
Activité

Lien avec le programme de T STI2D : équation différentielle du premier ordre $y' + ay = b$, où a et b sont des nombres réels, avec $a \neq 0$.
Lien avec Les maths au quotidien : Bricolage. Issu de l'ouvrage « BTS industriels » chez Delagrave.

On considère une chasse d'eau constituée d'un réservoir qui a la forme d'un parallélépipède rectangle et alimentée par un flotteur qui permet la fermeture progressive de la vanne.



Quand le réservoir est vide, la vanne est grande ouverte, le débit est maximal. Au fur et à mesure que le réservoir se remplit, le flotteur monte, la vanne se ferme de plus en plus et le débit diminue progressivement jusqu'à l'arrêt complet.
Les dimensions du réservoir sont :
longueur = 40 cm, largeur = 10 cm et hauteur maximale d'eau = 30 cm.
Le débit maximal du robinet est de 0,6 L·s^{-1}.
L'objectif de cette activité est de déterminer l'expression de la hauteur d'eau en fonction du temps lorsque le réservoir se remplit.

1 Donner l'expression du volume V (en litres) d'eau dans le réservoir en fonction de la hauteur h (en mètres) d'eau dans le réservoir.

2 On suppose que la relation qui lie le débit D à la hauteur d'eau est linéaire : $D = a\,h + b$ où a et b sont des constantes réelles. Donner l'expression de D (L·s^{-1}) en fonction de h (m).

? Le débit D est au maximum quand le réservoir est vide et il est nul quand le réservoir est plein.

3 On rappelle que le débit est la dérivée du volume par rapport au temps.
Montrer que h vérifie l'équation dite différentielle (E) : $h'(t) + 0{,}05\,h(t) = 0{,}015$.

4 Montrer que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(t) = -\,0{,}3\,\mathrm{e}^{-0{,}05t} + 0{,}3$ est une solution de (E) et qu'elle vérifie la condition initiale : le réservoir est vide à l'instant $t = 0$. Tracer sa courbe représentative $\mathscr{C}_h$ dans un repère du plan.

5 Montrer que la droite d d'équation $y = 0{,}3$ est une asymptote à $\mathscr{C}_h$.

6 Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}_h$ au point d'abscisse 0.

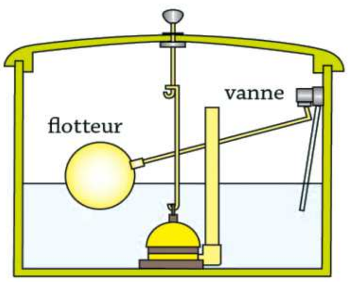
7 Déterminer l'abscisse t_0 du point de croisement de T et d et montrer que $h(t_0)$ représente 63 % du remplissage final du réservoir.

i t_0 s'appelle la constante de temps du système.

Activité

Lien avec le programme de T STI2D : équation différentielle du premier ordre $y' + ay = b$, où a et b sont des nombres réels, avec $a \neq 0$.
Lien avec Les maths au quotidien : Bricolage. Issu de l'ouvrage « BTS industriels » chez Delagrave.

On considère une chasse d'eau constituée d'un réservoir qui a la forme d'un parallélépipède rectangle et alimentée par un flotteur qui permet la fermeture progressive de la vanne.



Quand le réservoir est vide, la vanne est grande ouverte, le débit est maximal. Au fur et à mesure que le réservoir se remplit, le flotteur monte, la vanne se ferme de plus en plus et le débit diminue progressivement jusqu'à l'arrêt complet.
Les dimensions du réservoir sont :
longueur = 40 cm, largeur = 10 cm et hauteur maximale d'eau = 30 cm.
Le débit maximal du robinet est de 0,6 L·s^{-1}.
L'objectif de cette activité est de déterminer l'expression de la hauteur d'eau en fonction du temps lorsque le réservoir se remplit.

1 Donner l'expression du volume V (en litres) d'eau dans le réservoir en fonction de la hauteur h (en mètres) d'eau dans le réservoir.

2 On suppose que la relation qui lie le débit D à la hauteur d'eau est linéaire : $D = a\,h + b$ où a et b sont des constantes réelles. Donner l'expression de D (L·s^{-1}) en fonction de h (m).

? Le débit D est au maximum quand le réservoir est vide et il est nul quand le réservoir est plein.

3 On rappelle que le débit est la dérivée du volume par rapport au temps.
Montrer que h vérifie l'équation dite différentielle (E) : $h'(t) + 0{,}05\,h(t) = 0{,}015$.

4 Montrer que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(t) = -\,0{,}3\,\mathrm{e}^{-0{,}05t} + 0{,}3$ est une solution de (E) et qu'elle vérifie la condition initiale : le réservoir est vide à l'instant $t = 0$. Tracer sa courbe représentative $\mathscr{C}_h$ dans un repère du plan.

5 Montrer que la droite d d'équation $y = 0{,}3$ est une asymptote à $\mathscr{C}_h$.

6 Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}_h$ au point d'abscisse 0.

7 Déterminer l'abscisse t_0 du point de croisement de T et d et montrer que $h(t_0)$ représente 63 % du remplissage final du réservoir.

i t_0 s'appelle la constante de temps du système.