LE PROBLEME DU COLLECTIONNEUR

Niveau : terminale S.

Lien avec le programme : probabilité conditionnelle, activité algorithmique, simulation d'une marche aléatoire, activité sur tableur, suite, raisonnement par récurrence.

Lien avec *Les maths au quotidien* : Société.

Mikaël raffole des cordons bleus mais aussi des chouettes cartes de France. Il achète donc régulièrement des cordons bleus, et espère réunir les 101 Départ'Aimants composant la carte de France.
On suppose qu'à chaque achat d'un cordon bleu, il a la même probabilité d'obtenir chacun des 101 départements et que Mikaël n'a pas de copain pour faire des échanges.

Mikaël, tranquillement assis dans son canapé après avoir fort bien diné (cordon bleu sur salade en entrée, cordon bleu haricot vert en plat et cordon bleu coulis de framboise en dessert) se pose la question suivante :

Quel est le nombre moyen de cordons bleus que je dois acheter afin d'obtenir toute la carte de France ?

Pour commencer cette étude qui s'annonce passionnante, notons que la situation est modélisable par une marche aléatoire entre des points situés sur une droite graduée, le point 0 représentant la situation de Mikaël n'ayant encore rien acquis, le point k celle de Mikaël ayant acquis k Départ'Aimants, le point 101 étant le point d'arrivée du parcours.
Occupons-nous, pour nous mettre en jambe, des probabilités de transitions entre les différents états :

1. Avec quelle probabilité passe-t-on du point k au point $k + 1$ (en une étape) ?

2. Avec quelle probabilité reste-t-on au point k (en une étape) ?

3. Avec quelle probabilité passe-t-on du point k au point m ($m \neq k + 1$, en une étape) ?

Dans la suite, on va utiliser n à la place de 101 pour donner un contenu un peu plus général au problème.

4. Répondre aux questions précédentes avec cette nouvelle donnée.

On souhaite maintenant écrire un algorithme simulant 5000 fois la marche aléatoire précédente et donnant en sortie le nombre moyen d'étapes pour arriver au point n.

5. Compléter l'algorithme suivant en utilisant les éléments de gauche :

- S prend la valeur S + m
- m prend la valeur 0
- ($k < n$)
- S prend la valeur S/5 000
- Afficher S
- S prend la valeur 0
- ($x > k$)
- k prend la valeur k + 1
- m prend la valeur m + 1

Variables : k, n, x, m, i, sont des entiers naturels.
S est un nombre réel
Début de l'algorithme
Saisir n
……………………………………………………..
Pour i allant de 1 à 5 000 faire
  k prend la valeur 0
  …………………………………………………
  Tant que ……………………………….. faire
    ………………………..………………………..
    x prend la valeur d'un nombre entier aléatoire compris entre 1 et n
    Si ………………………………… alors
      ……………..……………….………………
    Fin Si
  Fin Tant que
  ………..…………………….…………………..
Fin Pour
……………………………………………………..
……………………………………………………..
Fin de l'algorithme

6. **a.** Programmer cet algorithme.

   b. Tester le programme et répondre à cette question : entre quels multiples de 10, consécutifs, peut-ton estimer le nombre moyen de cordons bleus à acheter pour avoir toute la carte de France ?

Retrouvons à nouveau notre ami dans son canapé, en train de faire son raisonnement.
« Comme j'aime bien les mathématiques, je vais traiter le cas général où le nombre total d'objets à collectionner (ici des départements…) est quelconque, égal à n.
J'ai ce soir k départements tous différents (avec $0 \leqslant k < n$).
Je note t_k le nombre moyen de paquets à acheter pour terminer ma collection, sachant que je suis déjà en possession de k objets distincts ($0 \leqslant k \leqslant n$).
J'ai donc, ce soir, t_k paquets à acheter en moyenne pour terminer ma collection.
Demain matin, j'irais acheter un délicieux cordon bleu et j'espère bien obtenir un département supplémentaire. Voyons, voyons, j'ai une probabilité $p_k = \frac{k}{n}$ que ce département soit déjà en ma possession et $1 - p_k = \frac{n-k}{n}$ que ce soit un nouveau département.
Si je suppose que le département que je vais obtenir demain est un département que j'ai déjà, après l'achat de ce nouveau paquet, il me restera, en moyenne, encore t_k paquets à acheter.
Donc j'ai dans ce cas, ce soir, encore $t_k + 1$ paquets à acheter, et ceci avec la probabilité p_k.
Si je suppose que le département que je vais obtenir demain est un nouveau département, après l'achat de ce nouveau paquet, il me restera, en moyenne, encore t_{k+1} paquets à acheter puisque j'aurais alors $k + 1$ départements.
Donc j'ai dans ce second cas, ce soir, encore $t_{k+1} + 1$ cordons bleus à acheter en moyenne, et ceci avec la probabilité $1 - p_k$.

Le raisonnement précédent amène la relation : $t_{k+1} = (t_k + 1)\, p_k + (t_{k+1} + 1)(1 - p_k)$ (essayer de s'en convaincre !)

7. Montrer que pour tout k entier compris entre 0 et n, $t_{k+1} = t_k - \frac{n}{n-k}$.

8. Montrer par récurrence que, pour tout k entier compris entre 0 et n, $t_k = t_n + \sum_{i=1}^{n-k} \frac{n}{i}$.

9. En déduire, que le nombre de Départ'Aimants à se procurer en moyenne, pour avoir la collection de n Départ'Aimants, sachant que l'on débute la collection est $n \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$.

10. **a.** À l'aide d'une feuille de calcul, en déduire le nombre de cordon bleu que Mikaël devra s'attendre à acheter afin d'obtenir la carte de France.

    b. À l'aide de la feuille de calcul, en déduire le nombre moyen d'objets à acheter si la collection comptait 200 objets.

REMARQUE :

Quand n est grand, on montre que le nombre moyen d'objets à acheter est équivalent à $n(\ln n + \gamma)$ où γ est la constante d'Euler-Mascheroni, définie comme étant la limite de la suite $\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \ln n\right)$.

C'est l'objet **de l'exercice 3 du sujet de bac de métropole juin 2012** de montrer que la suite $\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \ln n\right)$ converge.

Exercice 3 bac S 2012 : étude de fonction (limites, variations, signe), étude d'une suite numérique (variations, signe, convergence), algorithmique, calcul intégral.

Cette suite ne converge pas très vite, comme un tableur ou l'algorithme de l'exercice de bac le suggère. Cependant, avec $\gamma \approx 0{,}577$, $101(\ln 101 + 0{,}577)$ donne 524,4 au lieu de 524,9… pas mal !