

CHAÎNE DE TENSION MINIMALE

Niveau : terminale S.

Lien avec le programme : fonction exponentielle, dérivées, limites, théorème des valeurs intermédiaires, calcul intégral.

Lien avec *Les maths au quotidien* : thème Chainette. Exercice en lien avec une autre discipline.

Exercice 3 du sujet de baccalauréat Asie, juin 2014

Une chaîne, suspendue entre deux points d'accroche de même hauteur peut être modélisée par la représentation graphique d'une fonction

g définie sur $[-1 ; 1]$ par : $g(x) = \frac{1}{2a} (e^{ax} + e^{-ax})$

où a est un paramètre réel strictement positif.

On ne cherchera pas à étudier la fonction g .



On montre en sciences physiques que, pour que cette chaîne ait une tension minimale aux extrémités, il faut et il suffit que le réel a soit une solution strictement positive de l'équation $(x - 1)e^{2x} - 1 - x = 0$.

Dans la suite, on définit sur $[0 ; +\infty[$ la fonction f par $f(x) = (x - 1)e^{2x} - 1 - x$ pour tout réel $x \geq 0$.

1. Déterminer la fonction dérivée de la fonction f . Vérifier que $f'(0) = -2$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$.
2. On note f'' la fonction dérivée de f' . Vérifier que, pour tout réel $x \geq 0$, $f''(x) = 4x e^{2x}$.
3. Montrer que, sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ la fonction f' s'annule pour une unique valeur, notée x_0 .
4. a. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, puis montrer que $f(x)$ est négatif pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0 ; x_0]$.
b. Calculer $f(2)$.
En déduire que sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, la fonction f s'annule pour une unique valeur.
Si l'on note a cette valeur, déterminer à l'aide de la calculatrice la valeur de a arrondie au centième.
5. On admet sans démonstration que la longueur L de la chaîne est donnée par l'expression :

$$L = \int_0^1 (e^{ax} + e^{-ax}) dx.$$

Calculer la longueur de la chaîne ayant une tension minimale aux extrémités, en prenant 1,2 comme valeur approchée du nombre a .