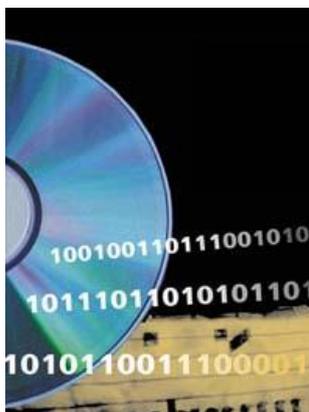


Mathématiques dans la vie quotidienne



Les mathématiques sont partout : dans nos cartes bancaires, la météo, la foudre, les robots, la construction des ponts, les finances. Les applications des mathématiques sont innombrables et font partie de notre quotidien. Elles vont parfois se nicher là où l'homme de la rue ne s'y attend pas. Cette exposition décrit l'omniprésence des mathématiques dans notre environnement de tous les jours.

Public : tout public. En exploitation scolaire dans les collèges et les lycées.

Conception : Centre Sciences/CCSTI d'Orléans

Création : 2000

L'EXPOSITION :

Les applications des mathématiques sont montrées ici sous une grande variété d'aspects. Elles sont souvent étonnantes et parfois énigmatiques pour le profane. Les manifestations scientifiques de tout ordre seront agrémentées avec bonheur par cette exposition.

PUBLIC

La bonne compréhension de l'intégralité de cette exposition est réservée à un public de lycéens et d'étudiants.

CONCEPTION

Centre Sciences.

CRÉATION

2000.

TARIF

gratuit

le transport de l'exposition est à la charge de l'emprunteur

poids : 2,5kg

DESCRIPTIF :

12 affiches plastifiées rigides, 0,82 x 0,55 m, percées de 2 trous, à accrocher.

TITRE DES AFFICHES :

- 01 - Comment paver ?
- 02 - D'un seul trait ?
- 03 - Écouter un CD rayé ! ? !
- 04 - Une météo turbulente !
- 05 - De l'eau dans l'huile ! ? !
- 06 - Des satellites aux portables !
- 07 - De l'arbre à la forêt !
- 08 - Des codes secrets rendus publics ?
- 09 - Zéro dommage !
- 10 - La bourse sans risque ?
- 11 - Au bout du génome !
- 12 - Des images débruitées !



Des codes secrets rendus publics ?

Grâce aux codes à clé publique, vous pourrez bientôt faire sans risque des achats sur Internet et transmettre vos références de carte bancaire.

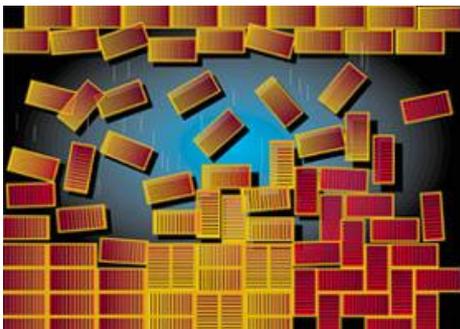
La méthode : le codage est rendu public, mais le message ne peut être déchiffré que par le destinataire autorisé, car la procédure de décodage reste secrète!

C'est vrai par exemple pour la méthode RSA conçue en 1978 par Rivest, Shamir et Adleman.

L'astuce ? Si un nombre est le produit de deux autres, il peut être très difficile de retrouver les deux nombres le composant, surtout si les nombres sont très grands. Le codage, qui est public, utilise seulement le nombre produit; les deux nombres le composant, eux, restent secrets. Ils sont nécessaires pour décoder. C'est pour cette raison que la recherche mathématique s'intéresse aux très grands nombres premiers, de plusieurs centaines de chiffres.

Des grands nombres premiers :

D'un autre côté, certains mathématiciens cherchent, et parfois trouvent, des algorithmes de factorisation suffisamment rapides pour constituer une menace sur la sécurité de RSA ; cela oblige à augmenter, avec les années, l'ordre de grandeur des nombres premiers utilisés. Les recherches mathématiques très "pures", portant sur les nombres premiers et la factorisation des grands nombres, sont devenues d'une importance cruciale pour la cryptographie. Des spécialistes élaborent aussi des méthodes de cryptage fondées sur les propriétés arithmétiques des "courbes elliptiques", d'autres recherchent des procédures mettant en oeuvre les lois étranges de la physique quantique...



Comment paver ?

L'utilisation de pavages périodiques à des fins décoratives est une tradition aussi ancienne que la géométrie elle-même. Le même pavé rectangulaire permet de couvrir le plan de plusieurs façons, sans recouvrement ni lacune. Les pavages ci-dessous (dessin de pavages avec les pavés organisés de différentes façons) sont périodiques et présentent des symétries différentes. On peut aussi changer la forme

du pavé pour obtenir d'autres types de symétries. Combien?

17 groupes de pavages du plan.

L'étude des symétries des pavages périodiques repose sur la *théorie des groupes*, créée par le mathématicien français Evariste Galois (1811-1832). Elle a permis de montrer qu'il n'existe que 17 groupes de pavages plans distincts. Chacun d'eux figure déjà parmi les décors de l'Alhambra de Grenade, construit il y a 1000 ans.

Le problème analogue dans l'espace, motivé par l'étude des cristaux, montre qu'il existe 230 groupes.

Mais on ne sait pas tout car il existe des quasi cristaux, des pavages non périodiques qui sont encore l'objet de recherches.



Au bout du génome !

Depuis une vingtaine d'années, l'apparition de techniques nouvelles (séquençage de l'ADN, puces à ADN...) ouvre des perspectives révolutionnaires en biologie. Ces techniques génèrent une masse considérable de données très variées.

Les maths sont au centre de leur traitement et permettent d'en extraire les infos pertinentes. Les domaines les plus sollicités sont l'algorithmique et la statistique.

Structure des protéines.

Les protéines sont de longues chaînes d'acides aminés repliées dans l'espace. L'activité d'une protéine s'explique essentiellement par sa forme après repliement. Pour de multiples applications

(pharmacologie, agriculture...) on doit connaître cette forme. On fait appel massivement à des méthodes mathématiques et informatiques pour "calculer" cette forme.



La bourse sans risque ?

Comment faire une opération boursière sans risque? Il suffit de prendre une assurance pour un prix et à une date fixés à l'avance. L'exemple le plus ancien est celui des marchands génois : lorsqu'ils affrétaient un bateau, ils achetaient une option sur un second navire. Si le premier arrivait à bon port, l'option n'était pas exercée et sa valeur était perdue, s'il coulait, l'assurance leur permettait d'acheter la cargaison du second à un prix fixé à l'avance.

Une formule, trouvée par Black et Scholes (prix Nobel d'économie en 1997), permet de fixer aujourd'hui à l'avance le prix de l'option.

Gardez vos dollars?

Changer ses dollars de suite ou attendre que le cours monte ? Les banques proposent de vendre les dollars au meilleur du cours d'aujourd'hui et du cours dans 6 mois. Combien cela nous coûtera-t-il? La réponse est dans la formule de Black et Scholes.



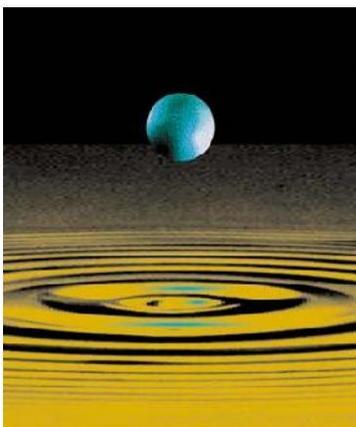
De l'arbre à la forêt.

Étudier les effets du climat sur les arbres et les forêts demande des modèles de leur évolution tenant compte d'autant de facteurs que possible, tout en étant assez simples pour pouvoir être étudiés. Cela exige une étroite collaboration entre mathématiciens et experts des forêts. Les principales difficultés :

- plusieurs systèmes hiérarchisés sont en jeu (forêt, arbre, feuille, molécule...)
- différentes échelles de temps coexistent (centaines d'années pour la durée de vie, quelques secondes pour le métabolisme...)

La lutte pour la lumière.

D'énormes progrès ont eu lieu ces dernières années. Un modèle dynamique, basé sur les processus vitaux et l'environnement local des arbres, a été appliqué avec succès à l'analyse des effets climatiques et sert aussi à la gestion des forêts et à l'amélioration de la qualité du bois. De nouveaux modèles prennent en compte la croissance des arbres au cours de l'année et permettent notamment de prévoir la compétition des espèces dans la lutte pour la lumière.



De l'eau dans l'huile !?

Comment mélanger deux substances qui ont tendance à se repousser? Cela dépend de la température et des seuils de saturation qui correspondent à l'équilibre entre l'énergie et l'entropie des produits.

Mettez un peu d'eau dans l'huile, que va-t-il se passer ? Une seule goutte va-t-elle se former? Plusieurs ? Aucune ?

Pour analyser ces phénomènes de coexistence et de séparation de deux liquides, des modèles mathématiques essaient de décrire comment le hasard, qui est présent au niveau atomique, peut induire des effets géométriques,

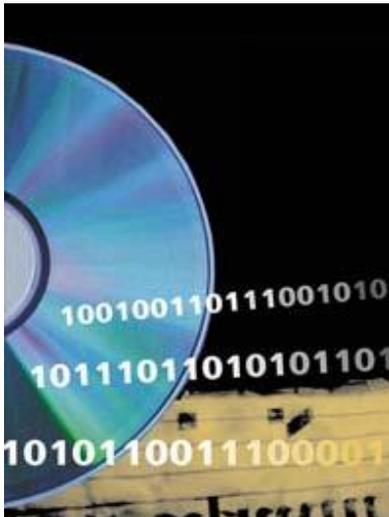
déterministes à notre échelle. Lorsque la température est basse, les particules de même type ont une tendance très forte à se regrouper, tandis qu'à haute température, le hasard tend à faire se mélanger les deux types de molécules de manière homogène.

Un modèle probabiliste.

Un modèle simple, le modèle d'Ising, décrit ces phénomènes de transition de phases.

Partant d'une description microscopique du système, il permet d'expliquer, à l'échelle

macroscopique, les régimes de solubilité et de saturation et de vérifier la prédiction de formation d'une goutte unique avec une forme sphérique. Il décrit l'interaction entre particules voisines et comporte un paramètre, la température, qui contrôle le hasard. Une valeur critique de la température sépare le régime où l'on observe un mélange homogène du régime où l'on observe deux phases distinctes.



Écouter un CD rayé ?

Sur un disque compact, comme sur un ordinateur, chaque son est codé par une suite de 0 et de 1, regroupés par paquets (les octets). Pour garantir la fidélité de l'enregistrement, on ajoute d'autres octets qui permettent de repérer et corriger les petites erreurs dues aux poussières ou aux rayures.

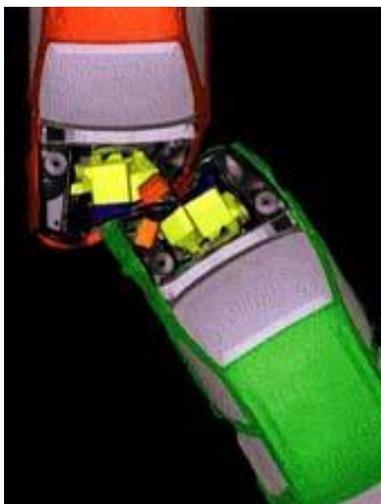
La théorie mathématique des codes correcteurs d'erreurs étudie comment augmenter la fiabilité tout en diminuant le coût du codage. Elle a aujourd'hui de nombreuses applications : fabrication des disques compacts, transmission des informations par Internet ou par satellites...

Distance entre deux mots.

Plus l'écriture des "mots" est différente, plus le risque de confusion diminue. Pour minimiser le nombre d'octets ajoutés, on utilise un paramètre important des codes correcteurs, la "distance" -dite de Hamming- entre deux mots.

C'est le nombre de symboles qui sont différents : entre 10100111 et 10111111, la distance vaut 2, entre 10100111 et 10000001, elle vaut 3.

Il est facile d'améliorer la correction en augmentant la longueur des mots. Les algorithmes de codage permettent des compromis : repérer au mieux les erreurs en augmentant le moins possible la longueur des mots.



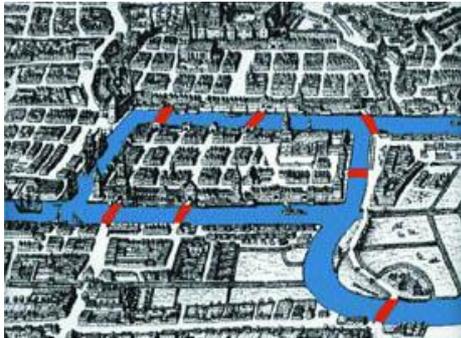
Zéro dommage !

Dans l'industrie automobile, les simulations sur ordinateur remplacent de plus en plus souvent les expériences réelles. Pour cela, les ingénieurs développent des programmes virtuels de voiture décrits par des équations dont la résolution nécessite des méthodes mathématiques avancées et des ordinateurs performants. On peut ainsi tester le comportement des véhicules à moindre coût.

Simulations : du réel au virtuel

Le prototype virtuel d'une voiture demande la conception d'un modèle mathématique global intégrant les caractéristiques du véhicule mais aussi ses interactions

avec la route, avec l'air, la description d'éventuels obstacles, discrétisation, est résolu sur ordinateur avec des méthodes numériques.
La complexité de ces modèles conduit à des calculs très volumineux qui nécessitent des ordinateurs fortement parallèles.



D'un seul trait ?

Les 7 ponts de Königsberg. Peut-on parcourir la ville de Königsberg en passant sur chaque pont une fois et une seule ? Étudié par Léonard Euler au 18ème siècle, ce problème est à l'origine de la théorie des graphes qui, aujourd'hui, intervient dans de nombreux domaines : gestion des réseaux de distribution, trafic routier, ordonnancement, affectation des ressources, transmetteurs de téléphones mobiles, conception des circuits électroniques...

Trois schémas de plan : pouvez-vous retracer chacun de ces dessins sans lever le crayon et en passant une fois et une seule sur chaque trait ?

La réponse d'Euler : comptez le nombre de points où aboutira un nombre impair de traits. Si ce nombre est égal à zéro ou à deux, il y a des solutions. Dans tous les autres cas, il n'y a pas de solution.



Des satellites aux portables !

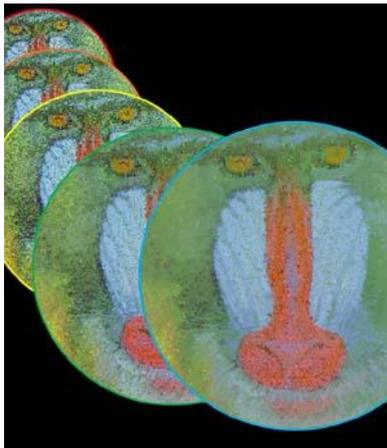
Télécommunications, navigation, météorologie, téléphones cellulaires, GPS, Internet... autant de raisons d'envoyer des satellites autour de la Terre.

Les projets, de plus en plus nombreux, nécessitent l'envoi d'engins spatiaux au moindre coût. Pour cela, les mathématiciens sélectionnent et optimisent les trajectoires et les orbites des engins, affinent les économies d'énergie... Ils utilisent des outils développés depuis longtemps, méthode de Lagrange (1755), de

Gauss (1801)... mais aussi des résultats récents qui tiennent compte de la théorie de la relativité.

Une assistance gravitationnelle :

Pour trouver la meilleure trajectoire du véhicule spatial et exploiter au mieux l'attraction d'un corps céleste, il faut que la vitesse du véhicule varie le moins possible en passant près du corps, nécessitant le minimum de manœuvre et d'énergie supplémentaires. Pour cela on peut agir sur trois paramètres : la vitesse d'approche, la vitesse de sortie et la distance de survol.



Des images débruitées.

Les images numériques présentent toujours des imperfections, appelées bruit, qui sont dues aux capteurs. Avant de pouvoir exploiter ces images, une des premières étapes de la vision par ordinateur est de les débruiter, c'est-à-dire d'obtenir une image aussi régulière que possible à partir de l'image brute. Cela peut-être fait grâce à un algorithme où chaque niveau de gris de l'image est codé sous forme numérique. Cet algorithme s'étend sans difficulté aux images en couleurs.

Du flou au lissage :

Pour réaliser ce débruitage, on utilise des équations aux dérivées partielles. La plus connue est l'équation de la chaleur. Pour une image noir et blanc, cela revient à considérer que le niveau de gris de chaque point est une moyenne pondérée des niveaux de gris des points voisins. Cela a comme inconvénient de rendre flous les bords des objets. On y remédie en utilisant des lissages qui n'emploient pas tous les points voisins.