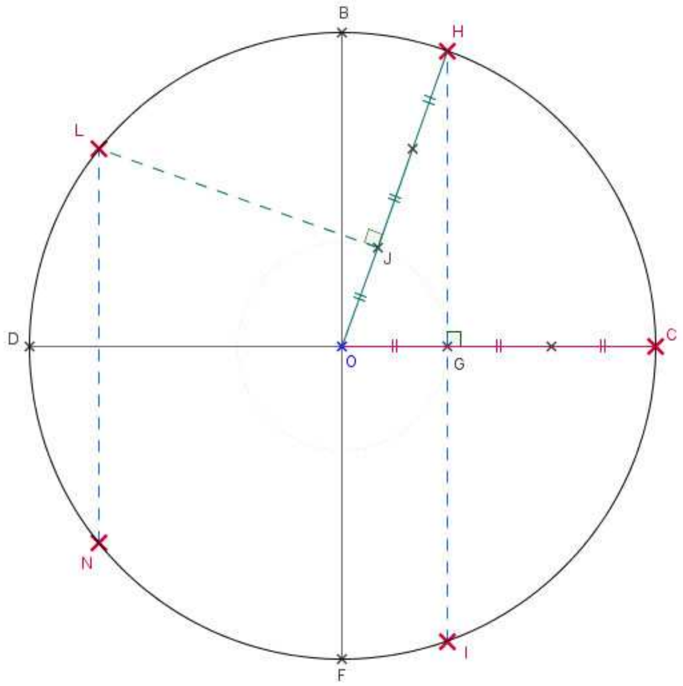
Devoir à la maison *à faire en mangeant une pizza*

Romain, grand amateur de pizza, a invité Donatello, Leonardo, Raphaël et Michelangelo à déguster une pizza au piment chez PizzaFive. Le serveur apporte la pizza, et en quelques coups de couteau coupe la pizza en cinq parts qui semblent « égales »[1] ! Romain, étonné, lui demande comment il a fait. Le serveur, qui semble ravi qu'on lui pose cette question, sort alors une carte de sa poche. Romain s'empresse de la lire :



- Je trace le centre O de la pizza, et deux diamètres perpendiculaires [BF] et [DC].
- J'évalue le point G au tiers de [OC] en partant de O, je trace la perpendiculaire à (OC) passant par G : elle coupe les bords de la pizza (le cercle) en deux points H et I.
- J'évalue le point J au tiers de [OH] en partant de O, et je trace la perpendiculaire à (OH) passant par J : elle coupe le cercle en un point L.
- Enfin, je trace la parallèle à (BF) passant par L : elle coupe le cercle en un point N.

En traçant sur la pizza [OH], [OL], [ON], [OI] et [OC], j'obtiens cinq parts égales !

Cette méthode, très simple, permet-elle effectivement de partager la pizza en cinq parts « égales »[2] ?

Afin de simplifier les calculs, on considère que notre pizza a un rayon OC=1 cm.

I- Conjecture [facultatif]

Faire une figure sur le logiciel de géométrie dynamique Geogebra, et conclure (à l'aide d'une conjecture). Envoie ton fichier Geogebra au professeur par email.

II- Démonstration

Dans la suite, lorsqu'on parle de mesure d'angle, l'unité de mesure est le degré.

1. Calculer $\cos(\widehat{HOC})$. En déduire une valeur approchée de la mesure de l'angle $\widehat{HOC}$?

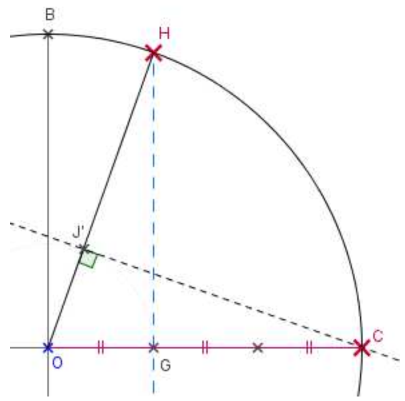
2. Calculer $\cos(\widehat{COI})$. En déduire que $\widehat{COI} = \widehat{HOC}$.

1 On considère que la pizza est un disque (on aurait pu également la modéliser par un cylindre de révolution); par « égales » on entend « de même aire ».

2 *Ne faites confiance à personne. La vérité est ailleurs. X-Files...*

3. Soit *(d)* la droite perpendiculaire à *(OH)* qui passe par *C*, et *J'* le point d'intersection de *(d)* et *(OH)*.

Montrer que $OJ' = \dfrac{OC}{3}$.



4. En déduire que $J = J'$, puis que le triangle *OJC* est rectangle en *J*.

5. Montrer que les points *L*, *J* et *C* sont alignés.

6. Montrer que $\widehat{HOL} = \widehat{HOC}$. *<u>Indication</u> : le triangle LOC est isocèle en O.*

7. Montrer que $\widehat{LOD} = 180° - 2 \times \widehat{HOC}$.

8. Montrer que $\widehat{NOD} = \widehat{LOD}$. En déduire que $\widehat{LON} = 360° - 4 \times \widehat{HOC}$, puis donner une valeur approchée de la mesure de l'angle $\widehat{LON}$.

8bis. Peut-on (déjà !) répondre au problème posé ?

9. Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{NOI}$? *<u>Indication</u> : symétrie axiale d'axe (DC)...*

10. Calculer l'aire de la pizza (autrement dit, l'aire du disque de centre *O* et de rayon *OC*).

On souhaite maintenant calculer les aires des 5 parts ainsi formées, c'est-à-dire les aires des secteurs circulaires formés par les demi-droites :

- *[OC)* et *[OH)* : secteur n°1 ;
- *[OH)* et *[OL)* : secteur n°2 ;
- *[OL)* et *[ON)* : secteur n°3 ;
- *[ON)* et *[OI)* : secteur n°4 ;
- *[OI)* et *[OC)* : secteur n°5.

11. Sachant que l'aire d'un secteur circulaire est proportionnelle à la mesure de son angle au centre, quelle est l'aire du secteur n°1 ?
<u>Indication</u> : tu peux compléter le tableau ci-dessous.

	Le disque	Secteur n°1
Mesure de l'angle au centre (en degrés) du secteur circulaire considéré	*360*	
Aire (en cm²) du secteur circulaire considéré		

12. De même, calcule les aires des secteurs n°2, n°3, n°4 et n°5.

13. Y a-t-il une part plus « grosse » qu'un autre ?
- Si oui, quelle est la proportion d'aire “en plus” dans la grosse part par rapport à la plus petite ?
(on appelle cela le ***taux de variation*** maximal des aires des parts coupées)
- Si non, proposer une idée de cadeau à faire au serveur pour le remercier de vous avoir appris une si belle méthode !

Pour le professeur

Question	*Notion(s) utilisée(s)*	*Vue en classe de...*
1 & 3	▪ utiliser dans un triangle rectangle la relation entre le cosinus d'un angle aigu et les longueurs des côtés adjacents ▪ utiliser la calculatrice pour déterminer une valeur approchée de l'angle aigu dont le cosinus est donné	4ème 4ème
2	Idem + “si les cosinus de deux angles sont égaux, alors ces deux angles sont égaux”	4ème (implicite...[3])
<u>*Remarque*</u> : on peut changer la question, par exemple “À l'aide du théorème de Pythagore, montrer que $HG=GI$. En déduire que *I* est le symétrique de *H* par rapport à *(OC)*, puis que $\widehat{COI}=\widehat{HOC}$.”. On utiliserait alors les notions suivantes : ▪ théorème de Pythagore + “soient a et b sont deux réels positifs. Si $a^2=b^2$ alors a=b” ▪ définition du symétrique d'un point par rapport à une droite ▪ “la symétrie axiale conserve les angles”		4ème possible en 3ème [4] 6ème 6ème
4	raisonnement possible dès la 6ème	
5	“si *(AB)=(BD)* alors *A*, *B* et *D* sont alignés”	Dès la 6ème (?)
6	▪ <u>1ère méthode</u> : “la hauteur issue de *B* dans un triangle *ABC* isocèle en *B* est aussi la bissectrice (intérieure) de l'angle $\widehat{ABC}$ ” ▪ <u>2ème méthode</u> : “la symétrie axiale conserve les angles”	6ème 6ème
7	▪ “si *A*, *B* et *C* sont alignés dans cet ordre alors $\widehat{ABC}=180°$ ” ▪ “si *A*, *B* et *C* sont alignés, et *D* n'appartient pas à *(AB)*, alors $\widehat{ABC}=\widehat{ABD}+\widehat{CBD}$ ”	6ème
8	▪ “la hauteur issue de *B* dans un triangle *ABC* isocèle en *B* est aussi la bissectrice (intérieure) de l'angle $\widehat{ABC}$ ” ▪ “si *A*, *B* et *C* sont alignés, et *D* n'appartient pas à *(AB)*, alors $\widehat{ABC}=\widehat{ABD}+\widehat{CBD}$ ” ▪ distributivité de la multiplication par rapport à l'addition	6ème 6ème 5ème
8bis	▪ “l'aire d'un secteur circulaire est proportionnelle à la mesure de son angle au centre” ▪ raisonnement par l'absurde ou par contraposée	Possible en 5ème [5] collège
9	“la symétrie axiale conserve les angles”	6ème
10	“l'aire d'un disque de rayon *r* est égale à π x *r* x *r*”	6ème
11 & 12	Compléter un tableau de nombres représentant une relation de proportionnalité dont les données sont fournies partiellement. En particulier, déterminer une quatrième proportionnelle.	5ème
13	proportion (calcul d'un pourcentage)	5ème

3 D'après la définition donnée en quatrième du cosinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle.

4 Bien que l'on ne parle pas *à priori* de nombres réels en troisième, on distingue rationnels et irrationnels...

5 Comme indiqué dans les programmes de cinquième (BO du 28 août 2008), *il est possible d'envisager, dans une formule, les variations d'une grandeur en fonction d'une autre grandeur*. Le BO du 19 avril 2007 rajoutait “*par exemple dans le cas de l'aire d'un secteur cicrulaire* ”. En quatrième, ce résultat est généralement utilisé dans des exercices pour calculer l'aire de la surface latérale d'un cône de révolution... Remarque: l'expression “angle au centre” est officiellement définie en troisième... on peut éventuellement éviter ce problème en parlant “d'angle d'ouverture du secteur circulaire”.