Remboursement d'un emprunt par annuités constantes

Niveau : term STG, avec un tableur comme Excel, sur des postes informatiques.
Lien avec le programme : suite géométrique – Tableur.
Lien avec ***Les maths au quotidien*** : **Plan de remboursement** p. 31.

Un homme veut emprunter à sa banque une certaine somme d'argent C, qu'il s'engage à rembourser en versant chaque année, durant n années, une certaines somme fixe a, appelée annuité.

La banque applique au capital C emprunté un taux d'intérêt annuel de t %.
Notons année 1 l'année où l'homme demande ce prêt.

On voit que l'annuité a remboursée l'année n est constituée de deux éléments :
- L'intérêt I_n produit par le capital restant dû.
- L'amortissement A_n correspondant à la part de capital remboursée.

Après versement de l'annuité la dette est diminuée du montant de l'amortissement.

Exemple :

Si le capital emprunté C est de 1 000 € et que taux d'intérêt annuel est de 6 %, alors une annuité de 1000 € se décompose comme suit : - Intérêt : $1\ 000 \times 0{,}06 = 60$ €
- Amortissement : $100 - 60 = 40$ €

Après le versement de cette annuité, la dette ne s'élève plus qu'à $1\ 000 - 40 = 960$ €.

Étude d'un exemple sur tableur

On souhaite établir le tableau d'amortissement d'un emprunt de 15 000 € sur 10 ans au taux annuel de 3 %.
Le remboursement se fait à annuités constantes selon le principe exposé précédemment.
L'objectif est de trouver le montant de l'annuité de manière à ce que le prêt soit totalement remboursé au bout de 10 ans.

	A	B	C	D	E	F
1	Capital emprunté		15 000 €			
2	taux d'intérêt		3%			
3	Annuité		1 000 €			
4						
5						
6	Année	dette en début d'année	Intérêt	Annuité	dette en fin d'année	Amortissement
7	1	15 000 €	450 €			
8	2					
9	3					
10	4					
11	5					
12	6					
13	7					
14	8					
15	9					
16	10					

1. Réaliser sur tableur la feuille de calcul suivante :
Les données seront à rentrer dans les cellules C2, C3 et C4. Les cellules de la zone (A7 : F16) ne contiennent que des formules.

2. Expliquer comment on peut obtenir la série de nombres de la zone (A7 : A16).
Quelle est la formule à rentrer en B7 ?
Quelles formules, destinées à être étendues vers le bas faut-il rentrer dans les cellules C7, D7, E7, F7, B8 ?

Cellule	Formule
B7	
C7	
D7	
E7	
F7	
B8	

3. En procédant par *approximations* successives, déterminer le montant de l'annuité qui fera en sorte que la cellule E16 contienne la valeur 0 ?

4. Vérifier avec le tableur que la suite des amortissements est une suite géométrique. Quelle est sa raison ?

5. Construire de manière analogue le tableau d'amortissement d'un emprunt de 20 000 € sur 20 ans au taux annuel de 4 %

Remarque : le tableur dispose de fonctions dites financières.

Par exemple la fonction VPM renvoie le montant de l'annuité suivant le taux et le nombre d'annuités (durée de remboursement). La fonction NPM, quant à elle, renvoie le nombre d'annuités suivant le taux et la valeur de l'annuité.

Étude théorique (technique !!)

Notations :

D_p	Dette en début de l'année p
I_p	Intérêts produit par D_p
A_p	Amortissement de la $p$ième année
t	Taux d'intérêt

Par définition on a :

$a = I_p + A_p$ (l'annuité de l'année p est la somme des intérêts et de l'amortissement de l'année p).

$D_p = D_{p-1} - A_p$ (le capital restant dû l'année p est la différence entre le capital restant dû l'année $p - 1$ et l'amortissement de l'année p).

$I_p = t\, D_{p-1}$ (les intérêts de l'année p sont produits par le taux d'intérêt t appliqué au capital restant dû l'année $p - 1$).

1. En utilisant le fait que l'annuité de la $p$ième année est égale à celle de la $(p + 1)$ième année donc que : $A_{p+1} + t\, D_p = A_p + t\, D_{p-1}$, montrer que :
$A_{p+1} = A_p + t\,(D_{p-1} - D_p)$ puis que $A_{p+1} = (1 + t)\, A_p$.
Quelle est la nature de la suite (A_p) ?

2. Si l'emprunt est remboursé en n années, la somme des amortissements est égale au montant du capital emprunté : $C = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$.
Montrer alors que : $C = A_1 \dfrac{1-(1+t)^n}{1-(1+t)} = A_1 \dfrac{(1+t)^n - 1}{t}$
En déduire que $A_1 = C\dfrac{t}{(1+t)^n - 1}$

3. En partant de l'égalité $a = I_1 + A_1 = t\,C + A_1$ et en utilisant le résultat précédent, montrer que :
$a = t\,C\dfrac{(1+t)^n}{(1+t)^n - 1}$.
En déduire que $\boxed{a = t\,C\dfrac{1}{1-(1+t)^{-n}}}$.

4. En utilisant la formule précédente, construire à l'aide du tableur une feuille de calcul qui affiche un tableau d'amortissement « *universel* » où les seules données à saisir sont :
- Le montant de l'emprunt
- Le taux d'intérêt annuel appliqué
- Le nombre d'annuités